ADI-SOYADI: Cevap Anahtarı
NUMARASI:

# 2017-2018 YAZ DÖNEMİ MAT101 ANALİZ I DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $M=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}>1\right\}$ kümesinin supremum ve infimum değerlerini bulunuz.

2) $(a_n)=\left\{\sqrt{5},\sqrt{5\sqrt{5}},\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}},\dots\right\}$ şeklinde terimleri verilen dizinin yakınsaklığını inceleyiniz.

3) Stolz teoremini ifade ediniz ve bu teoremden yararlanarak $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dots+\dfrac{1}{n}\right)$ limitini bulunuz.

4) $(x_n)=\left(\dfrac{2n+1}{3n-1}\right)\tan\left(\dfrac{n\pi}{5}\right)$ dizisi için $\overline{\lim}(x_n)$ ve $\underline{\lim}(x_n)$ değerlerini bulunuz.

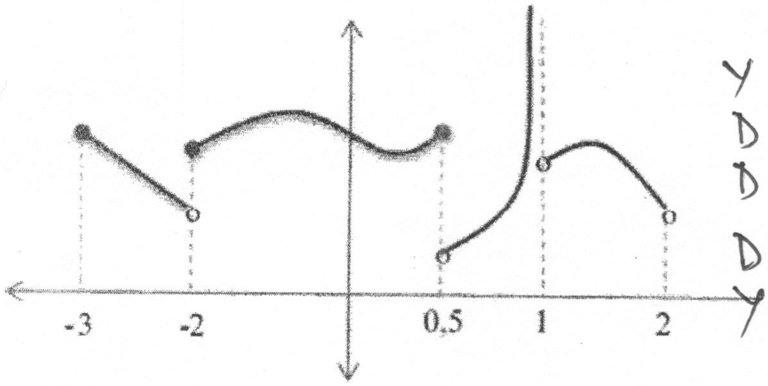
5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{x+4}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x\cdot\cot5x}{x\cdot\cot4x}$ limitlerini hesaplayınız.

6) $X\subset\mathbb{R}$ ve $f,g:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $a\in X$ noktasında sürekli ise $f+g, f\cdot g$ ve $\dfrac{f}{g}\ (g(a)\neq0)$ fonksiyonları da süreklidirler, gösteriniz.

7) $f(x)=3x^2-2x+1$ fonksiyonu $\forall a\in\mathbb{R}$ noktasında süreklidir, gösteriniz.

8) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{4}\\ 1, & x=\frac{\pi}{4}\\ x^2-\frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4}<x\le\pi\end{cases}$ fonksiyonunun tanım kümesini, süreklilik kümesini ve süreksiz olduğu noktalardaki süreksizlik çeşidini belirleyiniz.

9)




Yandaki grafiğe göre aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

Y I) $f$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-3,2)$ aralığıdır,

D II) $f$ fonksiyonu $x=-3$ noktasında süreklidir,

D III) $f$ fonksiyonu $x=-2$ ve $x=0,5$ noktalarında sonlu sıçramalı süreksizliğe sahiptir,

D IV) $f$ fonksiyonunun $x=2$ noktasında limiti vardır.

Y V) $f$ fonksiyonu $x=-2$ ve $x=0,5$ noktalarında sağdan süreklidir.

Not: Yalnız 7 soruya cevaplayınız. Süre 100 dakikadır.

1) $$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-2x+3}{x+1} > 1 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-2x+3}{x+1} - 1 > 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-2x+3-x-1}{x+1} > 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-3x+2}{x+1} > 0 \right\}$$

| | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x^2-3x+2}{x+1}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$$M = (-1, 1) \cup (2, +\infty) \Longrightarrow$$

$$\inf M = -1 \quad \sup M = +\infty .$$

2) $a_n = \{\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, ---\}$ için,

$a_{n+1} = \sqrt{5 \cdot a_n}$ yazılır.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 5$ dir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 5 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{5 \cdot a_n} < 5$

olup $(a_n)$ sınırlıdır (üstten)

(ii) $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5 \cdot a_n}}{a_n}\right)^2 = \frac{5a_n}{a_n^2} = \frac{5}{a_n} \Rightarrow$

$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = \frac{5}{a_n} > \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \sqrt[4]{5}$ olup artandır.

* Üstten sınırlı & artan bir dizi supremum değerine yakınsak olacağından $(a_{n+1}) \subset (a_n)$ ile

$a_n \to L \Rightarrow a_{n+1} \to L$ dir.

$a_{n+1} = \sqrt{5 \cdot a_n}$ 'de limit alınırsa

$L = \sqrt{5 \cdot L} \Rightarrow L = 5$ olur.

(3) $(x_n)$, $(y_n)$ bir reel dizi ve

$(y_n)$ artan, $y_n \to +\infty$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L \text{ 'dir.}$$

$$(x_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$(y_n) = n$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n)-(x_{n-1})}{(y_n)-(y_{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ dır.}$$

(4) $(x_n)$ dizisi için alt dizilerden önce sınırlılığına bakalım

$\frac{2n+1}{3n-1} \to \frac{2}{3}$ olup sınırlıdır.

$n\to\infty$ için $\tan\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ periyodik olması

kullanılırsa $\frac{\pi}{n\pi/5} = \frac{5}{n}$ ifadesiyle

$$(x_{5n}) = \left(\frac{10n+1}{15n-1}\right)\cdot \tan(n\pi) \longrightarrow 0$$

$$(x_{5n+1}) = \left(\frac{10n+3}{15n+2}\right)\cdot \tan\left(n\pi + \frac{\pi}{5}\right) \longrightarrow \tan\frac{\pi}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

$$(x_{5n+2}) = \left(\frac{10n+5}{15n+5}\right)\tan\left(n\pi + \frac{2\pi}{5}\right) \longrightarrow \frac{2}{3}\tan\frac{2\pi}{5}$$

$$(x_{5n+3}) = \left(\frac{10n+7}{15n+8}\right)\cdot \tan\left(n\pi + \frac{3\pi}{5}\right) \longrightarrow \frac{2}{3}\tan\frac{3\pi}{5}$$

$$(x_{5n+4}) = \left(\frac{10n+9}{15n+11}\right)\cdot \tan\left(n\pi + \frac{4\pi}{5}\right) \longrightarrow \frac{2}{3}\tan\frac{4\pi}{5}$$

$$\underline{\lim}\, a_n = \frac{2}{3}\tan\frac{4\pi}{5}, \quad \overline{\lim}\, a_n = \frac{2}{3}\tan\frac{\pi}{5}.$$

(5) $$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{x+4}} = \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\left(\sqrt{6-x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{6-x}+1\right)\cdot\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left(3-\sqrt{x+4}\right)\left(3+\sqrt{x+4}\right)\cdot\left(\sqrt{6-x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(5-x)}\cdot\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\cancel{(5-x)}\cdot\left(\sqrt{6-x}+1\right)} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x \cdot \cot 5x}{x\cdot \cot 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x\cdot \cos 5x\cdot \sin 4x}{x\cdot \cos 4x\cdot \sin 5x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot 3\cdot \underbrace{\frac{\cos 5x}{\cos 4x}}_{1}\cdot \underbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}_{1}\cdot \underbrace{\frac{5x}{\sin 5x}}_{1}\cdot \frac{4}{5}$$

$$= 12/5$$

(6) $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in X$ noktasında sürekli ise $\forall \varepsilon > 0$ için

(i) $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ o.ş.

$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$ vardır.

(ii) $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$ o.ş

$\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$ vardır.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alınırsa $|x-a| < \delta$ old. da

$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| = |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)|$$

$$\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)|$$

$$< 2\varepsilon \text{ olur.}$$

(iii) $f$, $a \in X$ noktasında sürekli old. dan

$\forall x \in U_{\delta_3}(a)$ için $|f(x)| < K$ o.ş. $K > 0$ vardır.

$\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ alınırsa (i) ve (ii) ile

$|x-a| < \delta'$ old. da

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| = |f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)|$$

$$= |f(x) \cdot g(x) \pm f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)|$$

$$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)| \cdot |g(a)|$$

$$< K \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot |g(a)| \text{ olur.}$$

(iv) $g(a) \neq 0$ old. dan $\forall x \in U_{\delta_4}(a)$ için

$|g(x)| > \frac{|g(a)|}{2}$ o.ş. $\exists \delta_4 > 0$ vardır. (i) ve (ii) ile

$\delta'' = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_4\}$ alınırsa $|x-a| < \delta''$

old. da

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right| = \frac{|f(x).g(a) - f(a).g(x)|}{|g(x).g(a)|}$$

$$= \frac{|f(x).g(a) \mp f(a).g(a) - f(a).g(x)|}{|g(x).g(a)|}$$

$$\leq \frac{|f(x) - f(a)|}{|g(x)|} + \frac{|f(a)|.|g(x) - g(a)|}{|g(x)|.|g(a)|}$$

$$< \frac{2\varepsilon}{|g(a)|} + \frac{|f(a)|}{|g(a)|} \cdot \frac{2\varepsilon}{|g(a)|}$$ olur.

⑦ $\lim_{x\to a} 3x^2-2x+1 = 3a^2-2a+1$ old. göstereceğiz.

$\forall \varepsilon>0$ için $|x-a|<\delta$ old.da

$|3x^2-2x+1-(3a^2-2a+1)|<\varepsilon$ o.ş. $\exists \delta>0$?

$|3x^2-2x+1-3a^2+2a-1| =$

$|3(x^2-a^2)-2(x-a)| = 3|x-a|\cdot|x+a|+2|x-a|$

$\leq 3\delta|x+a|+2\delta = 3\delta(|x-a|+2a)+2\delta$

$= 3\delta^2+2a\cdot 3\delta+2\delta \leq 5\delta+2a\cdot 3\delta$ ifadesinden

($\delta\leq 1$ olursa)

$\forall \varepsilon>0$ için $\delta=\min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5+6a}\right\}$ alınmalıdır.

8) $D_f = [-\pi/2, \pi]$ dir.

$f$, $(-\pi/2, \pi/4) \cup (\pi/4, \pi)$ üzerinde

elementer fonksiyonlar olup süreklidir.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}^{+}\right) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} \cos x = 0 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(\pi^{-}) = \lim_{x \to \pi^{-}} x^2 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{15\pi^2}{16} = f(\pi)$$

olup $f$, $x = -\pi/2$ ve $x = \pi$'de

süreklidir. Başlangıç ve bitiş noktalarında tek yönlü bakılır.

$$f(\pi/4) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}^{+}\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16} = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}^{-}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$$ olup $x = \pi/4$

sonlu sıçramalı süreksizlik noktasıdır.

$$S_f = [-\pi/2, \pi] \setminus \{\pi/4\}$$ olur.